数理解析研究所講究録
986 巻 1997 年 31-33

超幾何多項式と整数計画法

北海道大学 理学部 齋藤睦 (Mutsumi Saito)
University of California, Berkley Bernd Sturmfels
神戸大学 理学部 高山信毅 (Nobuki Takayama)

1. 講演内容の要約

$\mathcal{A}$-超幾何系 ([6]) の D-加群的な不変量と行列 A の定める整数計画問題および多面体に関する種々の量との間には下の表のようにいろいろな関係があることがわかりつつある. この講演では, この表の最後の 2 つ, $\mathcal{A}$-超幾何系の Indicial 多項式 と 整数計画問題の最適コストの関係および Indicial 多項式の具体的な形について論じる. (なお, [10] では indicial 多項式は b-function とよばれている. indicial 多項式は常微分方程式の特性多項式の偏微分方程式系への拡張である.)

Polytope, Integer programming	$\mathcal{A}$-hypergeometric system
The volume	The dimension of the solution space [6]
The secondary polytope	The newton polytope of the polynomial expressing the singular locus of the system [5, p.302]
The blue facets with respect to the point a_i	The b-function with respect to the variable x_i under normality [12]
The red facets with respect to the point a_i	The indicial polynomial along $x_i = 0$ under normality.
The optimal cost with the weight vector e_i	A root of the indicial polynomial along $x_i = 0$

ここで, red facets, blue facets は次のように定義する. 点 a_i に赤い光源をおく. この光を残りの点の凸包にあてて, 光のあたる facet を red facet, 当らない facet を blue facet とよぶ. ある重複度を定義すると b-関数の因子は blue facet に, indicial 多項式の因子は red facet に一対一に対応する. これが主定理である.

つぎに, 最適 cost について説明する. A を $d \times n$ 行列としその成分はすべて非負整数とする ($n \geq d$). 整数を成分とするベクトル$\alpha \in A\,\mathbf{N}^{n} \subseteq \mathbf{N}^{d}$ に対して, 条件

$$Ay = \alpha \tag{1}$$

を満たす非負整数を成分とするベクトル $y \in \mathbf{N}^{n}$ 全体を整数計画問題 (1) の feasible points とよぶ. $w \in \mathbf{N}^{n}$ を weight vector とするとき $w \cdot y$ を最小化するベクトル y を feasible points のなかで見つける問題を最適化問題という. この最小値を最適コストとよぶ. 単位 weight vector に対しては, 最適コストは Indicial 多項式の根となる.

$\mathcal{A}$ 超幾何系と整数計画問題を関連づけるために次のような多項式を考える.

$$\Phi(\alpha; x) = \sum_{Ak=\alpha, k_i \geq 0} x^k/k!, \quad k! = k_1! \cdots k_n!.$$

この多項式は feasible points の母関数となっており, さらに 行列 A の定義する $\mathcal{A}$-超幾何系の解である. Indicial 多項式の具体形をもとめるにはこの対応が基本的である.

なお, この研究では, 予想の検証, 反例の構成, 定理の証明に, D-加群の不変量を求める T. Oaku の アルゴリズム ([10]) および `kan/sm1` や `D-Macaulay` ([22]), さらに `Risa/Asir` の準素イデアル分解 ([7]) を用い, 計算代数による実験が極めて有効であった.

その他の話題としては, hypergeometric function の contiguity relation を用いた feasible points の数え上げの話もあるが, ここでは触れない. ここで述べた話については, `http://www.math.s.kobe-u.ac.jp/HOME/taka` に論文 [13] を置く予定なのでそちらを見て下さい.

参 考 文 献

[1] J.E.Björk, *Rings of Differential Operators*, (1979), North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

[2] P.Conti and C.Traverso, Buchberger algorithm and Integer programming, *Proceedings of AAECC-9*, Springer Lecture Note series in Computer science (1991), 130–139.

[3] H. Edelsbrunner, *Algorithms in Combinatorial Geometry*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987.

[4] I.M.Gel'fand, M.M.Kapranov and A.V.Zelevinskii, Generalized Euler Integrals and A-hypergeometric Functions, *Advances in Mathematics* **84** (1990), 255–271.

[5] I.M.Gel'fand, M.M.Kapranov and A.V.Zelevinskii, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, 1994, Birkhäuser, Boston.

[6] I.M.Gel'fand, A.V.Zelevinskii, and M.M.Kapranov, Hypergeometric functions and toral manifolds, *Functional Analysis and its Applications* **23** (1989), 94–106.

[7] T. Noro et al, Risa/Asir, *A computer algebra system*, 1994–, Object codes available for various computers. Download from ftp.fujitsu.co.jp/pub/isis/asir/ via anonymous ftp.

[8] T.Oaku, Algorithmic methods for Fuchsian systems of linear partial differential equations, *Journal of the Mathematical Society of Japan* **47** (1995), 297–328.

[9] T.Oaku, *Gröbner basis and differential equation — An introduction to computational algebraic analysis*, (in Japanese), (1995), Lecture note series from Sophia University, Tokyo.

[10] T.Oaku, An algorithm of computing b-functions, (1995), to appear in Duke Mathematical Journal.

[11] T.Oaku, Algorithms for b-functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D-modules, (1996), preprint.

[12] Mutsumi Saito, Parameter shift in normal generalized hypergeometric systems, *Tohoku Mathematical Journal* **14** (1992), 523–534.

[13] Mutsumi Saito, B.Sturmfels and N.Takayama, Hypergeometric polynomials and Integer Programming, preprint (1996).

[14] Mutsumi Saito, B. Strumfels and N. Takayama, Notes on indicial ideals, Manuscript (August, 1996).

[15] Mutsumi Saito and N.Takayama, Restrictions of $\mathcal{A}$-hypergeometric systems and connection formulas of the $\Delta_1 \times \Delta_{n-1}$-hypergeometric function, *International Journal of Mathematics* **5** (1994), 537–560.

[16] T.Sasaki, Contiguity relations of Aomoto-Gel'fand hypergeometric functions and Applications to Appell's system F_3 and Goursat's system ${}_3F_2$, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, **22** (1991), 821–846.

[17] A. Schrijver, *Theory of Integer Programming*, (1986), A Wiley-Interscience Publication.

[18] B.Sturmfels, Asymptotic analysis of toric ideals, *Memoirs of the Faculty of Sciences, Kyushu University, Series A: Mathematics* **46** (1992), 217–228.

[19] B.Sturmfels, *Gröbner bases and Convex polytopes*, (1995), AMS University Lecture series.

[20] N.Takayama, Gröbner basis and the problem of contiguous relations, Japan Journal of Applied Mathematics, **6**(1989), 147–160.

[21] N.Takayama, Computational algebraic analysis and connection formula, Sūrikaisekikenkyūsho Kokyūroku **811** (1992), 82–97.

[22] N.Takayama, *Kan: A system for computation in algebraic analysis,* 1991—, Source code available for Unix computers. Contact the author, or download from ftp.math.s.kobe-u.ac.jp via anonymous ftp. See also www.math.s.kobe-u.ac.jp/KAN/

[23] N.Takayama, Algorithms finding recurrence relations of binomial sums and its complexity, Journal of Symbolic Computation **20** (1995), 637–651.

[24] T. Terasoma, Hodge structure of Gel'fand-Kapranov-Zelevinski hypergeometric integral and twisted Ehrhard polynomial, (1996), preprint.

[25] R.Thomas, A geometric Buchberger algorithm for integer programming, (1994), to appear in Mathematics of Operations Research.

[26] http://www.math.s.kobe-u.ac.jp/HOME/taka/SmallPrograms, `conti24.sm1`, `trans.m` and `ct.m`.